Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 19 октября 2009.

Финал

1. Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P, лежащей внутри треугольника. Известно, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Докажите, что перпендикуляры, восставленные в точках A_1, B_1 и C_1 к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

2. Ребра полного графа на n вершинах покрасили в красный и синий цвета. При каком наименьшем n заведомо можно утверждать, что найдутся либо 100 попарно непересекающихся красных нечетных простых циклов, либо 100 попарно непересекающихся синих нечетных простых циклов?

3. На высоте опущенной из вершины A остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка K, что $AK = r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим через A_1 точку касания вписанной окружности со стороной BC, а через F точку Фейербаха. Докажите, что $\angle KFA_1 = 90^\circ$.

4. Из шахматной доски вырезана клетка. Рассмотрим все ломаные, все вершины которых различны и лежат в центрах невырезанных клеток, а каждое ребро имеет длину либо $\sqrt{17}$, либо $\sqrt{65}$. В каком случае ломаных больше: когда вырезана клетка $b1$, или когда $c6$?

5. По кругу стоят $n > 2$ натуральных чисел, не все из которых равны. Каждую минуту каждое число x заменяется на yz/x, где y и z — соседи числа x (например, из 1, 2, 3, 4 получаются числа 8, 3/2, 8/3, 3/4). При каких n возможно, чтобы при выполнении этой операции числа все время оставались натуральными?

6. При каких k существуют многочлен $P(x)$ степени k и многочлен $Q(x)$ такие, что $P^2(x) = (x^{10}+1)Q^2(x) + 1$?

7. Пусть $\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ — множество всех натуральных делителей натурального числа n. Известно, что

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m - m\sqrt[m]{d_1 \cdot \ldots \cdot d_m} = (\sqrt{n} - 1)^2,$$

Найдите все такие n.

8. Существует ли квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами такой, что количество простых делителей числа $f(n)$ ровно вдвое больше количества простых делителей числа n.

9. Пусть $n \geqslant 4$. Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, …, x_n равна 1. Найдите максимум выражения

$$\frac{x_1}{2-x_2} + \frac{x_2}{2-x_3} + \ldots + \frac{x_n}{2-x_1}.$$

10. Невена выбирает элемент x из множества $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 15, 16\}$. Эмиль передает Невене список из k подмножеств множества A, сумма элементов каждого из которых равна 79. После этого Невена рядом с каждым подмножеством пишет принадлежит ли ему элемент x. В своих ответах Невена может ошибиться не более одного раза. При каком наименьшем k Эмиль заведомо сможет узнать элемент x?